S E N S ' 2 0 0 6
Second Scientific Conference with International Participation
SPACE, ECOLOGY, NANOTECHNOLOGY, SAFETY
14 – 16 June 2006, Varna, Bulgaria

АЛГОРИТЪМ ЗА ОБРАБОТКА НА СИГНАЛИТЕ В РАДАР СЪС СИНТЕЗИРАНА АПЕРТУРА, ИЗПОЛЗВАЩ ЧИСЛОВО ПРЕОБРАЗУВАНИЕ НА МЕРСЕН

Росен Ат. Богданов*, Борислав Й. Беджев*, Александър П. Милев**

**НВУ "В. Левски", Факултет "Артилерия, ПВО и КИС",*
Ул. "Карел Шкорпил" №1, 9713 Шумен, e-mail: rab61@abv.bg, bedzhev@mail.pv-ma.bg
***Шуменски Университет "Еп. К. Преславски", Факултет "Математика и Информатика",*
Ул. "Университетска" №115, 9713 Шумен, e-mail: milev60@mail.bg

Ключови думи: Радиолокация, Теоретико-Числово Преобразувание на Мерсен.

Резюме: *Радарите със синтезирана апертура (РСА) се използват за разпознаване на обектите въз основа на основа на техните прецизно реконструирани изображения. Поради тази уникална способност РСА играят критична роля в някои области като например космическите изследвания и военното дело. Тази ситуация мотивира осъществяването на голям брой научно-изследователски проекти, целящи повишаването на възможностите на технологиите, използвани в РСА.*

Предвид на изложеното, целта на настоящия доклад е да се предложи алгоритъм за обработка на сигналите в РСА, използващ комплексно-значно Теоретико-Числово Преобразувание (ТЧП) на Мерсен.

Докладът е структуриран както следва. Първо се представят накратко математическите основи на ТЧП. След това се обосновава алгоритъм за обработка на сигналите в РСА, използващ ТЧП на Мерсен. Основната идея на алгоритъма е непрекъснатите конволюции, използвани за цифрова филтрация на сигналите, да бъдат разделени на серии от периодични конволюции, които могат да се изчислят чрез трансформации в крайни алгебрични полета. При това се анализират параметрите и ограниченията, които влияят на алгоритъма. Накрая са представени компютърни симулации, които демонстрират: работоспособността на алгоритъма, отстраняването на шума от закръгляването на операндите и ускоряването на изчислителния процес поради елиминирането на умноженията с плаваща запетая.

ВЪВЕДЕНИЕ

Радарите със синтезирана апертура (РСА) се използват за разпознаване на обектите въз основа на основа на техните прецизно реконструирани изображения. Поради тази уникална способност РСА играят критична роля в някои области като например космическите изследвания и военното дело. Тази ситуация мотивира осъществяването на голям брой научно-изследователски проекти, целящи повишаването на възможностите на технологиите, използвани в РСА.

Както е известно [1], [2], РСА използват движението на носител (самолет, космически апарат), на борда на който е разположена *радиолокационната станция* (РЛС), за да синтезират апертура с дължина, позволяваща постигнето на висока разделителност по азимут. При това РЛС излъчва последователност от *свръхвисокочестотни* (СВЧ) импулси с постоянен период на повторение [1,2]. В кохерентния приемник се извършва: детекция на сигналите в основния и квадратурния канали, разпределяне по ленти на еднаква отдалеченост, аналого-цифрово преобразоване и формиране на траекторен сигнал чрез запомняне на сигналите в рамките на няколко (*N* на брой) последователни периода на повторение. Обработката на траекторния сигнал във всяка една от лентите по разстояние се извършва чрез съгласувана филтрация като се използва израза

$$y_m = \sum_{n=0}^{N-1} h_n . x_{m-n} \tag{1}$$

където *h* е комплексно спрегнатата стойност на сигнал отразен от еталонна точка, разположена в центъра на обекта.

Използването на формула (1) може да бъде подобрено от гледна точка на бързодействие и точност, ако се използва специална аритметика [3], [4], [5], [6]. При това се дефинират преобразувания, които имат структура подобна на *дискретното преобразуване на Фурие* (ДПФ), но комплексната експонента се заменя с цели числа и се изпълнява в крайни алгебрични полета. Крайните полета са множества, състоящи се от q елемента и съществуват само в случаите, когато броят на елементите им е просто число или степен на простото число. Под термина „*Теоретико-числово преобразувание*" (ТЧП) върху последователността h_n се разбира преобразование, което има вида:

$$H_k = \sum_{n=0}^{N-1} h_n \alpha^{nk} \bmod q \, . \tag{2}$$

Тук N е дължина на преобразованието, q е просто число, α е основа (корен) на преобразованието. Поради това, че q е просто число , то за N съществува такова число N^{-1} за което е изпълнено

$$NN^{-1} \equiv 1 \bmod q \, , \tag{3}$$

а за α съществува мултипликативно обратен елемент α^{-1}modq . Следователно елементът α^{-kl}*modq* е определен коректно и може да се дефинира *обратно ТЧП* (ОТПЧ)

$$h_n = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} H_k \alpha^{-nk} \bmod q \tag{4}$$

За да се реализира ТЧП в съответствие с (2) е необходимо α да бъде N-ти корен от единица по модул от q, т.е. α трябва да бъде цяло число, такова, че N да е най-малкото цяло число за което е изпълнено условието:

$$\alpha^N \equiv 1 \bmod q \, . \tag{5}$$

Следователно за произволно просто число q може да се намери стойност на N, за която да съществуват ТПЧ и ОТПЧ. Двойката преобразования позволява непосредственото изчисление на циклична конволюция във формула (1) да се замени с изчислението на две ТЧП, използващи N умножения в областта на преобразуваните последователности, и обратно ТЧП.

Основните преимущества на използването на ТЧП в цифровата обработка на сигналите в РСА са: отстраняване на шума от закръгляването на операндите и ускоряване на изчислителния процес поради елиминирането на умноженията с плаваща запетая [3], [4], [5], [6].

В общия случай ТЧП се изчислява с умножение на степените на цялото число α и следователно не води до облекчаване на изчисленията. Все пак при подходящ избор стойностите на α и q умноженията могат да се заменят с преместване на разрядите на операндите наляво или надясно, което води до значително опростяване на изчисленията. Това е възможно, ако q е просто число, което е максимално близко до число от вида 2^s. На това условие отговарят така наречените числа на Ферма:

$$q = 2^{2^k} + 1 \tag{6}$$

и Мерсен:

$$q = 2^p - 1 \tag{7}$$

като в (7) p е просто число.

Числата на Ферма са прости за $k = 1,2,3,4$, но Леонард Ойлер е показал, че числото (6) при $k = 5$ е съставно. Освен това числата на Ферма растат много бързо при увеличаването на k. Същевременно простите числа в редицата (7) се срещат доста често, което значително улеснява разработването на системи за обработка на радиолокационна информация, притежаващи широк динамичен диапазон.

Предвид на изложеното, целта на настоящия доклад е да се предложи алгоритъм за обработка на сигналите в РСА, използващ комплексно-значно *ТЧП на Мерсен* (ТЧПМ).

По-нататък докладът е структуриран както следва. Първо се обосновава алгоритъм за обработка на сигналите в РСА, използващ ТЧПМ. Основната идея на алгоритъма е непрекъснатите конволюции, използвани за цифрова филтрация на сигналите, да бъдат разделени на серии от периодични конволюции, които могат да се изчислят чрез трансформации в крайни алгебрични полета. При това се анализират параметрите и ограниченията, които влияят на алгоритъма. Накрая са представени компютърни симулации, които демонстрират: работоспособността на алгоритъма, отстраняването на шума от закръгляването на операндите и ускоряването на изчислителния процес поради елиминирането на умноженията с плаваща запетая.

АЛГОРИТЪМ ЗА ОБРАБОТКА НА СИГНАЛИТЕ В РАДАР СЪС СИНТЕЗИРАНА АПЕРТУРА, ИЗПОЛЗВАЩ ЧИСЛОВО ПРЕОБРАЗУВАНИЕ НА МЕРСЕН

Необходимостта от разработването на системи за обработка на радиолокационна информация, притежаващи широк динамичен диапазон, налага търсенето на инструмент, който да даде възможност за получаване на преобразования с произволна дължина при запазване на предимствата от организацията на изчислителния процес с прости числа на Мерсен. При това е необходимо да се извърши цифрова филтрация върху реалната и имагинерната съставни на траекторния сигнал, т.е. необходимо е да се извършат преобразования върху сигнали с комплексен характер

$$x_n = x_{cn} + jx_{sn}, \quad h_n = h_{cn} + jh_{sn}, \quad j = \sqrt{-1}. \tag{8}$$

Комплексната конволюция може да се осъществи с помощта на действителни преобразования, като изчисленията на реалната и имагинерната компоненти се изпълняват с различни преобразования

$$\begin{aligned} y_m &= \sum_{n=0}^{N-1} h_n x_{m-n} = \sum_{n=0}^{N-1} (h_{cn} x_{c(m-n)} - h_{sn} x_{s(m-n)}) \\ &+ j\sum_{n=0}^{N-1} (h_{cn} x_{s(m-n)} + h_{sn} x_{c(m-n)}) \end{aligned} \tag{9}$$

В случая на прости числа на Мерсен крайното алгебрично поле, определено от операциите събиране и умножение по *модул q* и наричано *поле на Галоа* (Galois Field - $GF(q)$), не съдържа елемент $j = \sqrt{-1}$. Все пак е възможно разширение на простото поле $GF(q)$ до поле $GF(q^2)$, подобно на разширението на полето на реалните числа до поле на комплексните числа [5], [6]. Тогава преобразованието на Фурие в разширеното поле $GF((2^p-1)^2)$) може да се използва за изпълнение на конволюция, аналогично на конволюцията в полето на комплексните числа. По-конкретно, полето на вещeствените числа не съдържа елемент $j=\sqrt{-1}$ и следователно в това поле многочленът x^2+1 няма корен. Чрез присъединяване на елемента $j=\sqrt{-1}$ се формира множество, в което операциите събиране и умножение са дефинирани по правилата

$$\begin{aligned}(a+jb)+(c+jd)&=(a+c)+j(b+d)\\(a+jb)(c+jd)&=(ac-bd)+j(ad+bc)\end{aligned}\qquad(10)$$

Това ново множество всъщност е полето на комплексните числа.

Аналогично , в полето $GF(2^p-1)$ многочленът x^2+1 няма корени и относително операциите събиране и уможение зададени по правилата (10), множеството $GF((2^p-1)^2)$) образува поле. Дължината на възможните преобразования в разширеното поле се обуславя от изпълнението на условието:

$$N\mid q^2-1=N\mid((2^p-1))^2-1.\qquad(11)$$

След преобразуването $((2^p-1))^2-1=2^{p+1}(2^{p-1}-1)$ се вижда , че в разширеното поле са възможни преобразования с дължина степен на 2 до степен 2^{p+1} или някой от делителите на $(2^{p-1}-1)$. Възможността за използване на N равно на степен на 2 показва, че в този случай е допустимо изграждане на алгоритъм подобен на алгоритмите за бързо преобразование на Фурие с основа 2. Например за $p=17$, $q=(2^{17}-1)^2-1=2^{18}.3.5.17.257$. Тогава е възможно $N=2,2^2,\dots,2^{18}$.

Доказано е [6] съществуването на комплексни ТЧПМ с просто представяне на основите. Например при $\alpha=2j$ е допустимо преобразование с $N=4p$ защото е изпълнено:

$$(2j)^{4p}=1\bmod 2^p-1.\qquad(12)$$

Така комплексното 4р точково преобразование се определя от израза:

$$H_к=\sum_{н=0}^{4p-1}h_н\ (2j)^{nk}\bmod 2^p-1=\sum_{н=0}^{4p-1}h_н\ 2^{nk}j^{nk}\bmod 2^p-1\qquad(13)$$

за $k=0,1,2,.....4p-1$.

Тъй като р има мултипликативно-обратен елемент по модул 2^p-1, а обратният елемент на 4 е 2^{p-2}, то 4р има обратен елемент r, такъв, че е изпълнено

$$4p.r=1\ \bmod 2^p-1.\qquad(14)$$

Следователно съществува обратно преобразование, определено чрез израза

$$h_n=r\sum_{н=0}^{4p-1}h_н\ (2j)^{-nk}\bmod 2^p-1=r\sum_{н=0}^{4p-1}h_н\ 2^{-nk}j^{-nk}\bmod 2^p-1.\qquad(15)$$

При избор на $\alpha=j+1$ и $\alpha=1-j$ е възможно ТЧПМ с $N=8p$, защото е изпълнено:

$$(j+1)^{8p}=1\bmod 2^p-1,\ (1-j)^{8p}=1\bmod 2^p-1.\qquad(16)$$

Практическата приложимост на комплексно-значните ТЧПМ, описани по-горе, беше проверена с компютърна симулация на работата на РСА при следните допускания:

1) Обектът за наблюдение е съвкупност от I блестящи точки, намиращи се в една лента по разстояние спрямо облъчвателя и се движи равномерно праволинейно със скорост V в координатната система. При това наклоненото разстояние до всяка една от точките се описва от израза:

$$R_{ji}(p)=\begin{bmatrix} R_j^{\,2}+V^2T^2\left(\frac{N}{2}-p+im\right)^2- \\ -2R_jVT\left(\frac{N}{2}-p+im\right)\cos\Theta_0 \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}} \qquad (17)$$

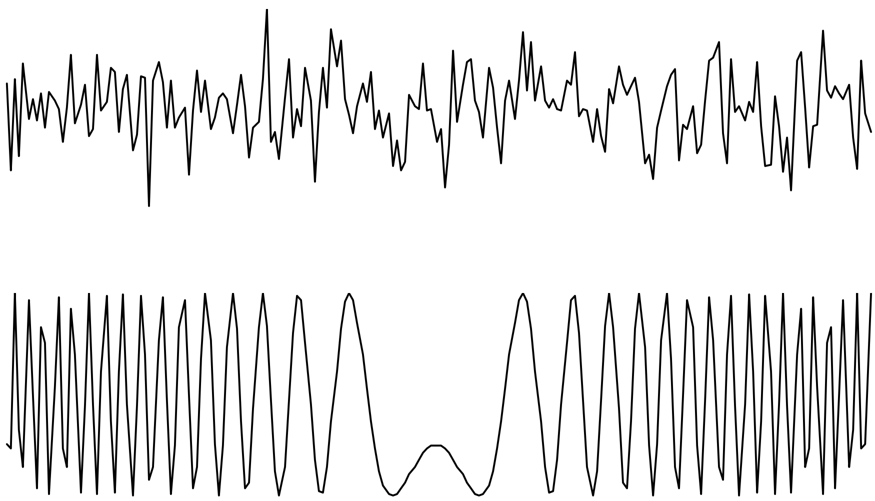
В (17) са използвани следните означения: R_j е разстоянието до j-та лента по разстояние, N е броят на излъчените за периода на наблюдение импулси, p е текущия номер на сондиращ импулс, i е индекс на точката , V е скоростта на обекта, T е периодът на повторение на импулсите, Θ_0 е ъгъл между траекторията на обекта и диаграмата на антената, m е относителното разстояние между точките, NTV е дължината на синтезираната апертура.

2) Комплексният отразен сигнал е сума от сигналите отразени от точките, намиращи се в една лента по разстояние:

$$S_j=\sum_{i=0}^{l-1}a_{ji}\exp\left[j\frac{4\pi}{\lambda}R_{ji}(p)\right] \qquad (18)$$

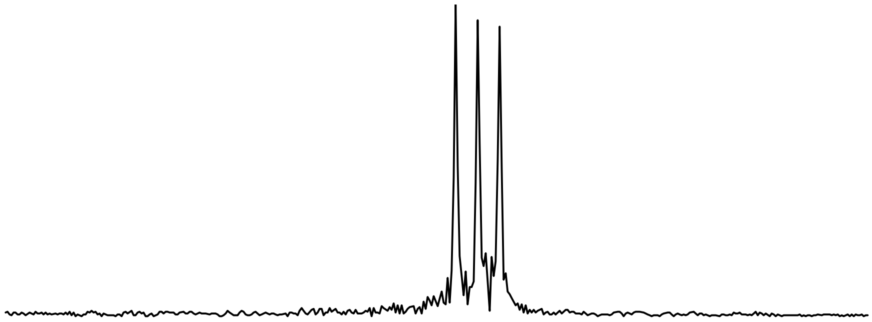
3) Отразеният сигнал е силно деформиран от гаусов шум (Фиг. 1а):

$$\xi_j(p)=\mathbf{S}_j(p)+\mathbf{n}_j(p) \qquad (19)$$



Фиг1.Траекторен и опорен сигнали

На фиг1. са показани реалните компоненти на отразен и опорен сигнал, като параметрите на обекта и пакета от сондиращи импулси са следните: R_j =20000м, N=200, V=300м/s, $\Theta_0=90^0$, T=3ms, l=3, m=10. Изчисленията са извършени при основа 2 за шестото число на Мерсен $F_M=2^{17}-1=131071$.



Фиг2.Обработен сигнал.

На фиг2. е показан модулът на сигнала на изхода на системата за обработка. За разлика от Фиг. 1а, на Фиг. 2 ясно се вижда, че сигналът е отразен от обект, съдържащ 3 блестящи точки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В доклада е предложен алгоритъм за цифрова филтрация на сигнали в РСА, използващ комплексно-значно теоретико-числово преобразуване на базата на числа на Ферма.

Практическата приложимост на алгоритъма е проверена чрез симулационен експеримент, проведен на универсален компютър. Резултатите от експеримента потвърждават основни положителни черти на алгоритъма:

- отстраняване на шума от закръгляването на операндите;
- ускоряване на изчислителния процес поради елиминирането на умноженията с плаваща запетая.

ЛИТЕРАТУРА

[1] A.D. Lazarov and Ch. Minchev, Correlation-autofocusing-spectral 2-D ISAR Image Reconstruction from Linear Frequency Modulated Signals, 21st Digital Avionics Systems Conference, Irvine, California, 15-18 Oct. 2002.

[2] A.D. Lazarov and Ch. Minchev, “Complementary code ISAR technique for stealth target detection and identification,” 23st Digital Avionics Systems Conference, on CD, Oct. 2004.

[3] R.C.Agarwal and C.S. Burrus, Fast convolution using Fermat number transform with applications to digital filtering, IEEE Trans. Acoust., Signal Process, 1974

[4] C.M.Rader, “Discrete Convolutions via Mersenne Transforms”, IEEE Trans.Comput. 1972.

[5] J.H. McClellan, C.M. Rader, Number Theory in Digital Signal Processing, Prentice Hall, 1979.

[6] R.E. Blahut, Fast algorithms for Digital Signal Processing, Addison-Wesley, 1985.